

---

**EXERCICES - VOCABULAIRE SUR LES ARBRES**

---

## Dessiner un arbre

### Une arborescence de fichiers

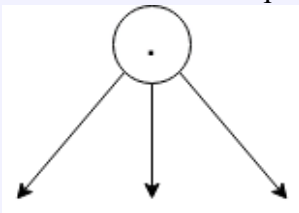
Sur *Linux*, on peut lister récursivement les répertoires et fichiers du système à l'aide de la commande `tree`. Voici un exemple d'arborescence obtenue après exécution de cette commande :

```
[erwan@de-arch dossier]$ tree
.
├── D1
│   └── D7
│       └── F2.txt
├── D2
│   ├── D4
│   │   └── D6
│   │       └── F1.txt
│   └── D5
└── D3
    └── F3.txt
```

Figure 1: Une arborescence sur Linux

#### Exercice 1

Dessinez un arbre représentant cette arborescence, en partant de l'arbre suivant :



1. Quelle est la **taille** de cet arbre ?
2. Combien y a-t-il d'**arêtes** dans l'arbre ?
3. Quelles sont les **feuilles** de l'arbre ?

En considérant que la **profondeur** de la **racine** est de **1** :

4. Quelle est la **profondeur** du nœud **D5** ?
5. Quelle est la **hauteur** de l'arbre ?
6. Cet arbre est-il un **arbre binaire** ? Pourquoi ?

## Arbre d'une page HTML

Voici le code HTML d'une page web :

```
1 <html>
2   <head>
3     <meta charset="utf-8">
4     <title>Ma superbe page</title>
5   </head>
6   <body>
7     <h1>Mon super titre</h1>
8     <p>Mon super paragraphe</p>
9     
10  </body>
11  <footer>
12    <p>Un pied de page</p>
13  </footer>
14 </html>
```

L'arbre (appelé *arbre DOM*) représentant ce code HTML est le suivant :

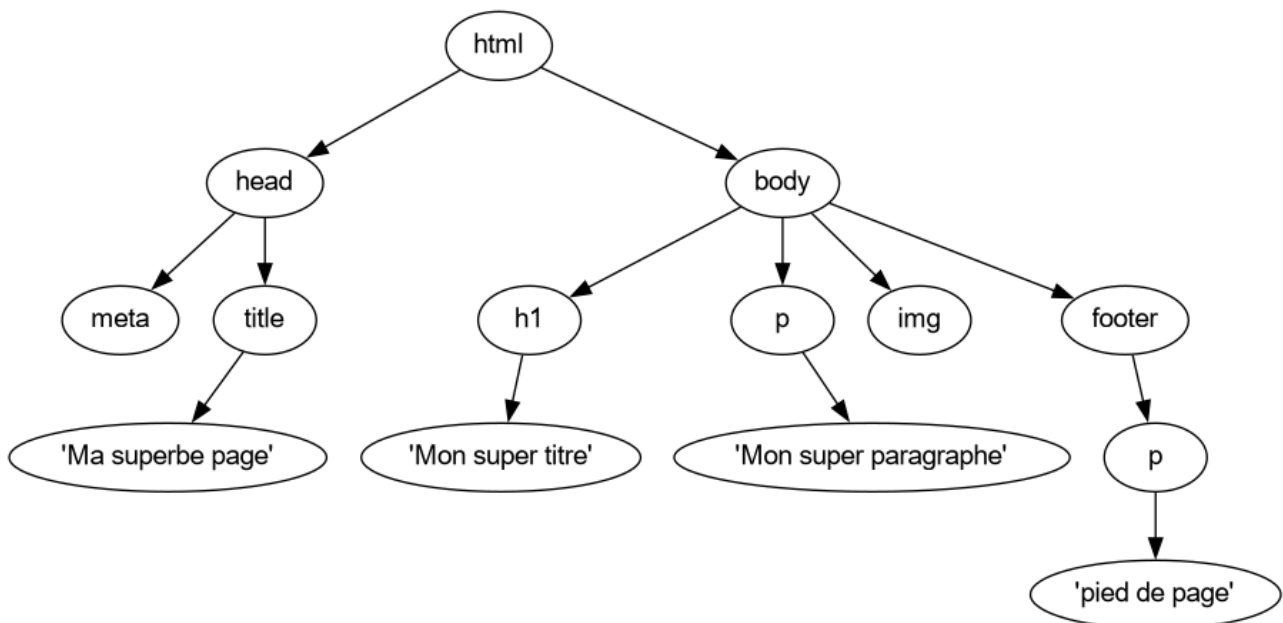


Figure 2: Arbre DOM d'une page HTML

## Exercice 2

À votre tour, dessinez l'arbre DOM représentant la page HTML suivante :

```
1 <html>
2   <head>
3     <meta charset="utf-8">
4     <link href="main.css" rel="stylesheet">
5     <title>Pokémons</title>
6   </head>
7   <body>
8     <section>
9       <h1>Types des pokémons</h1>
10      <ul>
11        <li>FEU</li>
12        <li>FOUDRE</li>
13        <li>EAU</li>
14        <li>HERBE</li>
15        <li>NORMAL</li>
16      </ul>
17    </section>
18  </body>
19 </html>
```

1. Quelle est la **taille** de l'arbre obtenu ?
2. Quelle est la **hauteur** de l'arbre obtenu :
  1. Si la profondeur de la racine est de **0** ?
  2. Si la profondeur de la racine est de **1** ?
3. Quels **types d'éléments** représentent les **feuilles** de l'arbre ?
4. Si les **nœuds** de l'arbre étaient des instances d'une classe `Noeud` caractérisés par une **étiquette** (`html`, `body`, etc) et des **données**, quelles pourraient être ces données ? (voir la balise `meta` ou `link` du code ci-dessus.)

## Arbre d'une expression arithmétique

Voici un **arbre binaire** représentant l'expression arithmétique  $(6 + 9)/3$  :

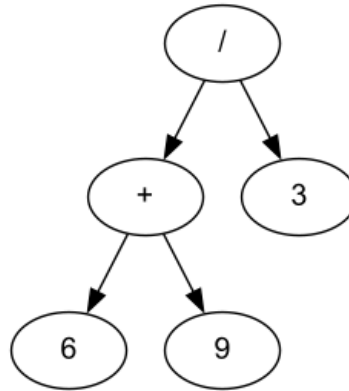


Figure 3: Arbre d'une expression arithmétique

### Exercice 3

À votre tour, dessinez l'**arbre binaire** correspondant à l'expression  $\frac{5*8}{30-(8*3)}$ .

1. Pour **quels opérateurs** le positionnement (gauche, droit) des opérandes a une importance ? Pourquoi ?
2. Quelle est la **taille** de l'arbre obtenu ?
3. Quelles sont les **feuilles** de l'arbre ? Quelle remarque pouvez-vous faire ?

En considérant que la **profondeur** de la **racine** est de **0** :

3. Quelle est la **profondeur** des feuilles **les moins éloignées** de la **racine** ?
4. Quelle est la **hauteur** de l'arbre ?

## Encadrement de la hauteur

Pour l'exercice suivant, on considérera que la profondeur de la racine d'un arbre est de 1.  
Voici deux **arbres binaires** :

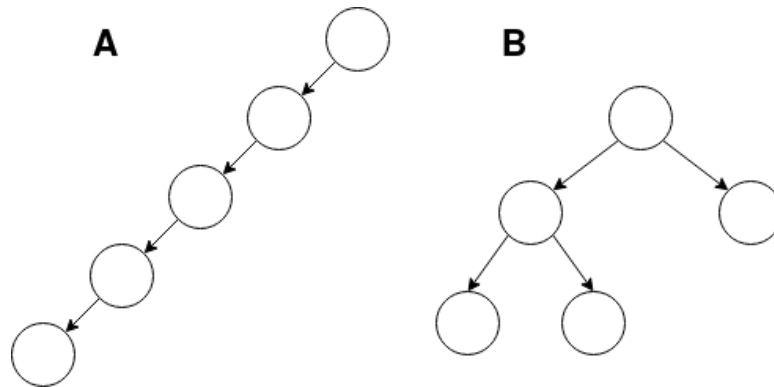


Figure 4: Deux arbres binaires

### Exercice 4

1. Parmi ces deux arbres, lequel est un arbre **filiforme** ? Un arbre **complet** ?
2. À quelle autre structure de données s'apparente un **arbre filiforme** ? Pourquoi ?
3. Quelle est la **taille** de ces deux arbres ?
4. Quelles sont toutes les **hauteurs** possibles pour une **taille**  $n = 5$  ?
5. Établissez une relation entre la **taille d'un arbre** notée  $n$  et la **hauteur de cet arbre** notée  $h$ , dans le cas où l'arbre est **filiforme**.
6.
  - a. Complétez l'arbre **B** de manière à obtenir un **arbre parfait**.
  - b. Combien y a-t-il de nœuds de **profondeur 1, 2 et 3** dans cet **arbre parfait** ? En déduire combien il y aurait de **nœuds de profondeur 4 et 5** dans un **arbre parfait de hauteur 5** (vous pouvez dessiner un tableau).
  - c. Établissez une relation entre le **nombre de nœuds** à une **certaine profondeur**, noté  $n_p$ , en fonction de cette **profondeur**, notée  $p$ .
  - d. En déduire une expression calculant la **taille**  $n$  (nombre de **nœuds**) d'un **arbre parfait** en fonction de sa **hauteur**  $h$ .
7. Enfin, proposez d'abord un encadrement de la **taille d'un arbre binaire** notée  $n$  en fonction de la **hauteur** notée  $h$  (en utilisant vos réponses aux questions 5. et 6.d.).  
À partir de l'encadrement précédent, déduire un **encadrement de la hauteur d'un arbre binaire** en fonction de sa **taille**.

## Dénombrement d'arbres binaires

### Exercice 5

Dessinez et dénombrez tous les **arbres binaires** possibles :

- pour une taille  $n = 1$ ,
- pour une taille  $n = 2$ ,
- pour une taille  $n = 3$ ,
- pour une taille  $n = 4$

Sans les dessiner et en vous aidant des réponses précédentes, déterminez le **nombre d'arbres** de taille  $n = 5$ .