FONCTIONS ET EXPRESSIONS BOOLÉENNES

Les fonctions booléennes

On a vu précédemment que les **circuits électroniques** pouvaient être conceptualisés en termes de **fonctions booléennes**, ce qui signifie qu'ils acceptent **un** ou **plusieurs bits en entrée** et produisent **un seul bit en sortie**.

Si nous désignons $\neg(x)$ comme la fonction associée à la porte **NOT**, $\wedge(x, y)$ comme celle associée à la porte **AND**, et $\vee(x, y)$ comme celle de la porte **OR**, ces trois fonctions sont caractérisées par les **tables de vérité** suivantes :

x	$\neg(x)$
0	1
1	0

x	y	$\wedge(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$\vee(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Figure 1: Fonctions associées aux portes NOT, AND et OR

Les trois **fonctions booléennes élémentaires** $\neg(x)$, $\wedge(x, y)$ et $\vee(x, y)$ sont utilisées comme **bases** pour la construction d'**autres fonctions booléennes**, et peuvent être combinées pour en définir de nouvelles.

Plus généralement, la **table de vérité** d'une fonction avec n **bits** en **entrée** aura 2^n **lignes** correspondant aux $2n$ **combinaisons possibles** des **entrées**.
Par exemple, une fonction booléenne f avec trois entrées x, y et z sera définie par une **table de vérité** à $2^3 = 8$ **lignes**, de la forme suivante :

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	$f(0, 0, 0)$
0	0	1	$f(0, 0, 1)$
0	1	0	$f(0, 1, 0)$
0	1	1	$f(0, 1, 1)$
1	0	0	$f(1, 0, 0)$
1	0	1	$f(1, 0, 1)$
1	1	0	$f(1, 1, 0)$
1	1	1	$f(1, 1, 1)$

Figure 2: Fonction avec trois bits en entrée

Aussi, pour simplifier la définition des fonctions booléennes, on utilisera plutôt ces fonctions comme des **opérateurs**, et on écrira et dira que :

- $\neg x$ est la **négation** de x,
- $x \wedge y$ est la **conjonction** de x et y,
- $x \vee y$ gest la **disjonction** de x et y.

Ces opérateurs sont désignés comme des opérateurs booléens en l'honneur de **Georges Boole**, un mathématicien et philosophe du *19e siècle* qui a créé ce système de calcul, également connu sous le nom d'**algèbre booléenne**. Ce calcul repose sur l'utilisation d'**opérateurs** et de **chiffres binaires**, appelés également **chiffres booléens**.

Parmi les opérateurs de base que nous n'avons pas encore abordés, il y a l'opérateur **ou exclusif**, que l'on note $x \oplus y$, qui est défini comme suit (avec sa représentation symbolique américaine et européenne) :

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

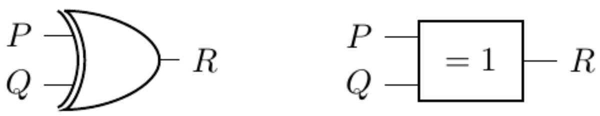

Figure 3: Porte OU EXCLUSIF

La sortie est 1 lorsque l'**une et une seule** de ses **entrées** est égale à 1, et elle renvoie 0 dans les autres cas.

Expressions booléennes.

En utilisant ces **opérateurs**, on peut définir **n'importe quelle fonction booléenne** comme une **expression booléenne sur ses entrées**. Par exemple, l'égalité suivante définit une fonction f avec **trois paramètres** x, y et z à l'aide d'une expression booléenne sur ses variables :

$$f(x, y, z) = (x \wedge y) \oplus (\neg y \vee z)$$

Pour calculer la **table de vérité** associée à la fonction f, on calcule les résultats des **sous-expressions**, en commençant par les calculs en profondeur puis en remontant.
Sur l'exemple précédent, cela revient à calculer les résultats des expressions $x \wedge y$ et $\neg y$, puis $\neg y \vee z$ et enfin le **résultat final** :

x	y	z	$(x \wedge y)$	$\neg y$	$(\neg y \vee z)$	$(x \wedge y) \oplus (\neg y \vee z)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0

Figure 4: Table de vérité de f(x,y,z)

Le calcul avec les **opérateurs booléens** obéit à quelques **identités élémentaires**, en voici quelques unes :

Identités élémentaires

identité	cas 1	cas 2
involutif	$\neg(\neg x) = x$	
neutre	$1 \wedge x = x$	$0 \vee x = x$
absorbant	$0 \wedge x = 0$	$1 \vee x = 1$
idempotence	$x \wedge x = x$	$x \vee x = x$
complément	$x \wedge \neg x = 0$	$x \vee \neg x = 1$
commutativité	$x \wedge y = y \wedge x$	$x \vee y = y \vee x$
associativité	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
distributivité	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
De Morgan	$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$	$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$

On peut, à l'aide de ces **identités élémentaires**, montrer par exemple l'égalité suivante :

$\neg(y \wedge (x \vee \neg y))$	$= \neg y \vee \neg(x \vee \neg y)$	De Morgan
	$= \neg y \vee (\neg x \wedge y)$	De Morgan et involutif
	$= (\neg y \vee \neg x) \wedge (\neg y \vee y)$	distributivité
	$= (\neg y \vee \neg x) \wedge 1$	complément
	$= (\neg y \vee \neg x)$	neutre
	$= (\neg x \vee \neg y)$	commutativité

Exercices

Exercice 1

Montrer de **deux manières différentes** l'égalité suivante :

- en comparant les deux **tables de vérité**
- en utilisant les **identités élémentaires**.

$(x \wedge y) \vee (\neg y \wedge z) = (x \vee \neg y) \wedge (y \vee z)$

Exercice 2

Définir une fonction booléenne f sur deux variables x et y qui vaut 1 **si et seulement si les deux variables** ont la **même valeur** (qu'elle soit 0 ou 1), en utilisant **uniquement** les opérations **NON**, **ET**, **OU** ou **OU exclusif**.

Donner sa **table de vérité**.

Exercice 3

On considère la **fonction booléenne** à **trois variables** suivante :

$$f(x, y, z) = (x \land \neg y \land \neg z) \lor (\neg x \land y \land \neg z) \lor (\neg x \land \neg y \land z)$$

Donner sa **table de vérité**. Que fait cette fonction ?
Donner une **expression booléenne plus simple** pour cette fonction.

Exercice 4 - *Hors programme*

Une **fonctions booléenne** peut être représentée par sa **forme normale conjonctive** (*FNC*) ou sa **forme normale disjonctive** (*FND*). Par exemple, voici une fonction $f(a, b)$ dont voici la table de vérité :

a	b	f(a, b)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

On peut alors écrire que $f(a, b) = (\neg a \land \neg b) \lor (a \land \neg b)$.
Il s'agit ici de la **forme normale disjonctive**, car on a des **sous-expressions** contenant des **conjonctions** $\land$ (entre parenthèses), et ces sous-expressions sont séparées par des **disjonctions** $\lor$.

On peut également écrire que $f(a, b) = \neg((\neg a \land b) \lor (a \land b)) = (a \lor \neg b) \land (\neg a \lor \neg b)$, qui est la **forme normale conjonctive**.

En vous basant sur sa **table de vérité**, donnez la **forme normale disjonctive** de l'opérateur **XOR** $\oplus$.

$x \oplus y =$ ....